Algebra

Luis Fernández
Departamento de Matemáticas
Universidad de los Andes

Capítulo 1

Números y operaciones

1.1. Conjuntos de números y operaciones

Uno aprende a contar desde pequeño. El primer conjunto de números con el que uno tiene contacto son los números llamados naturales: 1, 2, 3, 4, ... Este conjunto se denota normalmente con la letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Hay varias operaciones que podemos hacer con números naturales. La primera que se aprende es la suma: $3 + 13 = 16$, por ejemplo. Una vez aprendida la suma, aprender la operación de multiplicación es fácil: al fin y al cabo, multiplicar dos numeros naturales es una manera corta de escribir muchas sumas. Por ejemplo

$$3 \cdot 5 = \overbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}^{5 \text{ veces}}.$$

Después de aprender a sumar, uno aprende a hacer lo contrario: restar. Por ejemplo, $13 - 7 = 6$. Esto en realidad es responder a la pregunta: ¿Qué número le sumo a 7 para aue me dé 13? El problema con la resta es que la resta de dos números naturales no es necasariamente un número natural. Por ejemplo,

$$5 - 8 \notin \mathbb{N}.$$

Para arreglar este problema necesitamos ampliar el conjunto de números naturales para que incluyan todos aquellos números que salen de restar dos naturales. Esta ampliación de $\mathbb{N}$ incluye el cero y los números que llamamos 'negativos'. Se llaman números enteros y se denotan con la letra $\mathbb{Z}$. De esta manera tenemos la ventaja de que la resta deja de ser una nueva operación y se convierte en otra manera de escribir la suma con el inverso aditivo de un número. En otras palabras,

$$5 - 8 = 5 + (-8).$$

La otra operación que conocemos en los naturales, la multiplicación, la podemos extender como una operación en los enteros utilizando la regla de signos por todos conocida:

$$\begin{aligned} + \cdot + &= + \\ + \cdot - &= - \\ - \cdot + &= - \\ - \cdot - &= +. \end{aligned}$$

Es **muy importante** recordar la relacion que hay entre las dos operaciones principales ($+$ y $\cdot$), que se llama distributividad:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(aquí } a\text{, } b\text{, y } c \text{ representan números cualesquiera en } \mathbb{Z})$$

Siguiendo cronologicamente, la siguiente operación que uno aprende es la división. Dividir un número a por un número b es hallar otro número c tal que $c \cdot b = a$. Nos encontramos con el mismo problema que teníamos con la resta en los números naturales: en general la división (también llamada cociente) de dos números enteros no nos da un número entero. Igual que con la resta, toca ampliar el conjunto de números enteros para que el resultado de dividir dos números nos dé siempre otro número. Se define entonces el conjunto de números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$. son los números escritos en la forma

$$\frac{p}{q},$$

donde p y q son números enteros, y $q \neq 0$.

La restricción $q \neq 0$ responde a algo muy sencillo. Como dijimos arriba, $\frac{p}{q}$ es aquel número a tal que $q \cdot a = p$. Si q fuera 0, $0 \cdot a$ simepre es 0, y no puede dar p. Por eso una expresión del tipo

$$a = \frac{5}{0}$$

no tiene ningún sentido. Si lo tuviera, $a \cdot 0$ daría 5, lo que es imposible. ¿Qué sentido tiene algo de la forma

$$a = \frac{0}{0}?$$

Significaría que $a \cdot 0 = 0$. Pero esto se cumple para todo número a, y por tanto $0/0$ no tiene un valor definido, y no tiene sentido escribir algo que no tiene valor definido.

Estos números se llaman racionales porque son razones entre dos números (por ejemplo, $5/4$ es el número de veces que podemos meter 4 en 5). Se denotan por $\mathbb{Q}$ quizás porque también se llaman 'quebrados', o quizas porque cociente se escribe con q en otros idiomas.

Notar que $\mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{Z}$, ya que todo número p en $\mathbb{Z}$ se puede expresar como $p/1$, que es un número racional. ¿Como se suma, se resta, se multiplica y se divide en $\mathbb{Q}$?

Multiplicación: $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$.

División: $\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{p_2 \cdot q_1}$.

Suma: para sumar dos racionales hay que ponerlos bajo un denominador común. Piense que el denominador nos da 'las unidades de medida'. Por ejemplo, si tengo $3/4$ de libra de harina y la mezclo con media libra de azúcar, ¿Cómo calculo el peso de la mezcla? La harina esta expresada como 3 cuartosdelibra, y el azúcar como 1 medialibra. Cuartosdelibra y medialibras son unidades distintas: 2 cuartosdelibra dan 1 medialibra. Para calcular el peso total hay que ponerlo todo en las mismas unidades. 1 medialibra son 2 cuartosdelibra, así que tenemos que sumar 3 cuartosdelibra con 2 cuartosdelibra, que nos dan 5 cuartosdelibra. Ahora escrito con fracciones:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}.$$

En general, para dos números racionales cualesquiera, se utiliza cualquier múltiplo común de los denominadores para poner ambas fracciones bajo un denominador común. Lo más corto es utilizar el mínimo común múltiplo de los denominadores. El mínimo común múltiplo de dos números enteros es el entero más pequeño que es múltiplo de ambos. Algunos ejemplos:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{14} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 2}{14 \cdot 2} = \frac{21}{28} + \frac{10}{28} = \frac{31}{28}.$$

¿Por qué queda 28 abajo? Porque es un múltiplo de los dos denominadores: $4 \cdot 7 = 28$, y $14 \cdot 2 = 28$. También podíamos haber escogido cualquier otro múltiplo común. Por ejemplo, sale igual si hacemos

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{14} = \frac{3 \cdot 14}{4 \cdot 14} + \frac{5 \cdot 4}{14 \cdot 4} = \frac{42}{56} + \frac{20}{56} = \frac{62}{56} = \frac{31}{28}.$$

La resta de números racionales se hace igual: primero hay que poner ambos números con el mismo denominador.

A continuación enumeramos algunas propiedades (muchas de las cuales ya hemos utilizado) de las 4 operaciones que hemos estudiado hasta ahora sobre los racionales:

1. $\frac{p}{q} = \frac{a \cdot p}{a \cdot q}$ (es decir, la fracción no cambia si multiplicamos arriba y abajo por el mismo número).
2. Multiplicación y división de números conmutan completamente. Por ejemplo:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = a \cdot \frac{p}{b \cdot q} = \frac{1}{q} \cdot a \cdot \frac{p}{b}, \quad \text{etc.}$$
3. Cuando se simplifican fracciones es importante siempre tener en cuenta quién divide a quién. Por ejemplo, en
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}},$$
a 2 le dividen 3 y 5, pero a su vez, a 5 le divide 7. Si 7 divide al número que divide a 2, eso quiere decir que está aliado con el 2 y en contra de los que dividen al 2, que son 5 y 3. Así que poniendo los del mismo bando juntos nos queda:
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5},$$
que es la definición que dimos arriba para dividir racionales.
4. ¿Cómo se comporta la división con la suma y la resta? La *única* regla que hay es la distributividad:
$$\frac{a+b}{q} = \frac{a}{q} + \frac{b}{q}.$$
NO EXISTE NINGUNA REGLA CUANDO TENEMOS UNA SUMA EN EL DENOMINADOR. Por ejemplo, en general no hay nada que podamos hacerle a algo de la forma
$$\frac{p}{a+b}.$$

1.2. Ejercicios

1. Simpifique (es decir, escríbalas en la forma $\frac{\text{algo}}{\text{otro}}$) las siguientes expresiones:

   a) $\frac{m+3}{m-3} + \frac{m+2}{m-2}$

   b) $\frac{x+a}{x+3a} + \frac{3a^2 - x^2}{x^2 - 9a^2}$

   c) $\frac{\frac{a}{4} + \frac{5}{7}}{\frac{5}{h} + \frac{3}{6}}$

   d) $\frac{3}{5} + \frac{x+2}{x^2} + \frac{1}{3ax}$

   e) $\frac{x+2}{3x} + \frac{x^2-2}{5x^2} + \frac{2-x^3}{9x^2}$

f) $\dfrac{a^3}{ab^2 + a^2}$

g) $a\dfrac{bc}{d}\dfrac{d}{ba}$

1.3. Potencias y Raíces

Comencemos con potencias de números enteros. La misma relación que teníamos entre suma y multiplicación la tenemos ahora entre multiplicación y potencias: elevar un número a una potencia significa multiplicar ese número por si mismo tantas veces como diga la potencia, es decir

$$3^5 = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{5 \text{ veces}}.$$

Las propiedades de las potencias son las siguientes:

1. $(a \cdot b)^k = a^k \cdot b^k$.
2. $a^k \cdot a^r = a^{k+r}$
3. $(a^k)^p = a^{k \cdot p}$

Estas propiedades no tienen nada de misteriso. Piensen en ello, por ejemplo para la segunda propiedad: si multiplico a por si misma k veces, y luego multiplico el resultado por lo que da al multiplicar a por si misma r veces, en total tengo a multiplicada por si misma $k + r$ veces.

Si en algún momento tiene que simplificar potencias y no está seguro de si lo que quiere aplicar es válido o no, piense en un ejemplo facil (con números).

Las propiedades 1 y 2 anteriores nos dicen que potencias y productos se mezclan bastante bien. Esto es porque hacer una potencia es multiplicar muchas veces. Sin embargo, potencias y sumas se mezclan muy mal. Esto es porque están muy lejanas, como operaciones, una de la otra. Para ver como se mezclan potencias y sumas hay que hacerlo a través de la multiplicación, que está, por así decirlo, entre medias la suma y las potencias. O sea, que toca poner las potencias como productos. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b) \cdot (a+b) \text{ (aquí pasamos el } ^2 \text{ a productos)} \\
&= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b) \text{ (distributividad)} \\
&= a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 \text{ (distributividad otra vez)} \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}$$

NO HAY NINGUNA PROPIEDAD DE DISTRIBUTIVIDAD ENTRE SUMAS Y RESTAS Y POTENCIAS. PARA SIMPLIFICAR POTENCIAS DE SUMAS HAY QUE PASAR PRIMERO LAS POTENCIAS A PRODUCTOS, Y LUEGO USAR LA DISTRIBUTIVIDAD ENTRE EL PRODUCTO Y LA SUMA.

1.4. Ejercicios

1. Desarrollar las siguientes potencias

   a) $(a + b + c)^3$.

   b) $a \cdot b \cdot c)^3$.

2. Desarrollar

a) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)^2$.

b) $(a \cdot b \cdot c)^3$.

3. Hallar las siguientes raíces

a) $\sqrt{4a^2b^4}$.

b) $\sqrt{\dfrac{x^{2m}}{121y^{4n}}}$.

c) $\sqrt[4]{81a^{12}b^{24}}$.

4. Escribir con exponentes positivos y simplificar

a) a^2b^{-3}.

b) $\dfrac{x^{-2/3}y^{-1/4}}{x^2yz^{-1/2}}$.

c) $\dfrac{m^{-2}n^{-1}x^{-1/2}}{m^{-4}n^{-5}x^{-2}}$.

d) $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{-3}}{a^4c^{-1}}$

5. Expresar usando sólo exponentes positivos

a) $\sqrt{a^{-3}}$.

b) $a^{-3/5}\sqrt[4]{b^{-3}}$

c) $x^2\sqrt{x-1}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^{-7}b^{-6}}}$

6. Expresar usando sólo radicales y exponentes positivos (es decir, sin exponentes fraccionarios y/o negativos).

a) $x^{-1/2}$.

b) $\dfrac{3a^{-3/2}}{x^{-1/4}}$

c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3/2}$

d) $\left(x^{-1/2}\right)^{1/3}$

e) $x^{-2/3}y^{3/5}z^{-4/7}$

f) $5a^{5/7}b^{-1/3}$

7. Desarrollar

a) $(a^{1/2}+b^{1/2})^2$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt[3]{y})^3$

c) $(x^{-2}-y^{-1/3})^2$

d) $(a^{-2}+\sqrt{b})^2$

Capítulo 2

Polinomios y ecuaciones

Un polinomio en una variable (que normalmente se denota por x) es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Por ejemplo, $x^3 - x + 12$, x^{14}, 4, y $x^2 + 2x + 1$ son polinomios. A los números a_k se les llama 'coeficientes'. Por ejemplo, para $x^3 - x + 12$, 1 es el coeficiente de x^3, 0 es el coeficiente de x^2 (por eso no aparece el x^2 en la expresión, porque 0 por cualquier cosa es 0, y para sumar 0 es mejor no ponerlo), -1 es el coeficiente de $x^1 (= x)$ y 12 es el coeficiente de $x^0 (= 1)$. **El grado** de un polinomio es la mayor potencia de la variable (x en nuestro caso) que aparece, evidentemente con coeficiente distinto de 0. Por ejemplo, los grados de los polinomios de arriba son 3, 14, 0, y 2, respectivamente. Notar que un número, 6 por ejemplo, se puede pensar como $6x^0$, es decir, un polinomio de grado 0.

2.1. Multiplicación de polinomios

Dos polinomios se pueden multiplicar. Para ello hay que usar las leyes de distributividad entre suma y multiplicación de números que explicamos antes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(x^2 - 5x + 2)(x^3 + 3) &= x^2(x^3 + 3) - 5x(x^3 + 3) + 2(x^3 + 3) \\ &= x^5 + 3x^2 - 5x^4 - 15x + 2x^3 + 6\end{aligned}$$

Factorizar un polinomio es escribirlo como un producto de polinomios de grado menor. Por ejemplo

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1) \quad \text{(¡Compruébelo!)}.$$

La ventaja de factorizar un polinomio es que se convierte en producto de cosas más sencillas. El problema es: ¿Cómo se factoriza un polinomio? Hay varios métodos, pero primero necesitamos ver la sección siguiente.

2.2. Raíces de polinomios

Una raiz de un polinomio es una solución de la ecuación (llamemos $P(x)$ al polinomio)

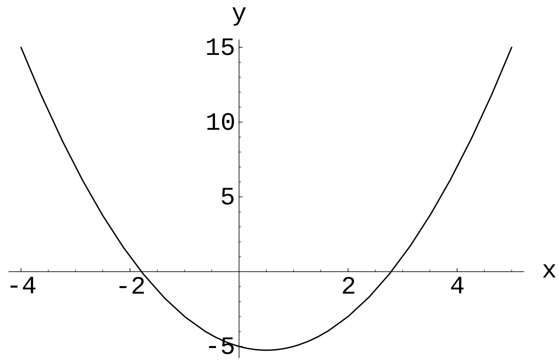
$$P(x) = 0.$$

Ejemplos:

1 es una raiz del polinomio $x^2 - 1$, ya que $x = 1$ es solución de la ecuación $x^2 - 1 = 0$, es decir, al sustituir x por 1 en $x^2 - 1$ nos sale 0.

2 es una raiz del polinomio $x^5 - 32$, ya que al sustituir x por 2 en $x^5 - 32$ nos sale 0.

Un polinomio es, también, una función que a cada número le asigna el valor que se obtiene al sustituir x por ese número en el polinomio. Por ejemplo, si $Q(x) = x^2 - x - 5$, $Q(3) = 3^2 - 3 - 5 = 1$. Una función tiene una representación gráfica. Si hacemos la representación gráfica de $Q(x) = x^2 - x - 5$ nos sale



Las raíces de este polinomio son donde el polinomio toma el valor 0. Es decir, donde la gráfica del polinomio corta al eje x. Vemos en la gráfica que las raices de este polinomio son, aproximadamente, $-1{,}8$ y $2{,}8$.

Dado un polinomio, ¿Cómo encontramos sus raíces? Esto depende del grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1 ó 2, es fácil encontrar sus raices; si el polinomio es de grado mayor que 2, es tarea más difícil, y a veces imposible si no es con la ayuda de un computador.

2.3. Factorización de polinomios

Imaginemos que tenemos un polinomio que se puede factorizar como $(x - a)\cdot$(otro polinomio). Por ejemplo

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 3 = (x - 3) \cdot (x^2 - x + 1).$$

¿Quién tenemos la seguridad de que es una raíz del polinomio? Si sustituímos $x = 3$ en la parte derecha de la igualdad anterior, nos queda 0·algo, que es igual a 0. Por tanto, 3 es una raíz del polinomio $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$.

Del mismo modo, si sabemos que a es una raíz de un polinomio, necesariamente ese polinomio tiene un factor del tipo $(x - a)$. Por ejemplo, -2 es una raíz del polinomio $x^3 + 2x^2 + x + 2$, ya que $(-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = 0$. Es fácil ver que $(x - (-2))$ $(= (x + 2))$ es factor de $x^3 + 2x^2 + x + 2$:

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x^2 + 1)(x + 2).$$

Es decir, tenemos:

$$a \text{ es raíz de un polinomio } \Longleftrightarrow (x - a) \text{ es factor de ese polinomio.}$$

Por tanto, para factorizar un polinomio completamente, basta con hallar todas sus raices. Y viceversa, para hallar todas las raíces de un polinomio, basta con factorizarlo.

Hay una cuestión que no hemos comentado. ¿Todo polinomio se puede factorizar como un producto de términos de la forma $(x - \text{algo})$ (quizás multiplicados por una cantidad constante)?

Veamos un par de ejemplos. Intentemos factorizar $x^2 - 4$. Como dijimos antes, basta con buscar sus raices. Tanto 2 como -2 son raices de este polinomio, lo que implica que $(x+2)$ y $(x-2)$ son factores de $x^2 - 4$. De hecho tenemos

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

Ahora probemos con otro polinomio. Por ejemplo, x^2+1. Como antes, busquemos sus raíces. Recuerden que una raíz de un polinomio es donde el polinomio vale cero. ¿Hay algún valor de x para el que x^2+1 dé 0? Pues parece que no, porque x^2 es un número siempre positivo o cero, y si a un número positivo o cero le sumamos 1, el resultado siempre va a ser mayor o igual que 1. Así que $x^2+1 \geq 1$ para todo x, y por tanto nunca es 0, y por tanto no tiene raíces, y por tanto no se puede factorizar.

En realidad todo polinomio *sí* se puede factorizar en términos de la forma $(x-a)$, pero siempre que permitamos que los a sean números denominados 'números complejos'. Los números complejos forman un conjunto de números que incluye a los reales. No es necesario que sepa, a este nivel, nada sobre los complejos; solo que existen.

Otra cuestión: ¿Cuántas raíces tiene, como máximo, un polinomio de grado n? En general, un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces que son números reales. Pueden tener menos que n raíces: por ejemplo, x^2+1, como vimos arriba, no tiene raíces reales, pero tiene grado 2.

2.4. Métodos para factorizar (o hallar raíces de) polinomios

2.4.1. Raíces de polinomios de grado 1.

Un polinomio de grado 1 es de la forma $ax+b$. Hallar su raíz es lo mismo que resolver la ecuación $ax+b=0$. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 0, \\ 5x &= -7, \\ x &= -\frac{7}{5}, \end{aligned}$$

y por tanto la raíz es $x=-7/5$.

2.4.2. Raíces de polinomios de grado 2.

Un polinomio de grado 2 es de la forma ax^2+bx+c. Para hallar sus raíces, tenemos que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Notar que **esta ecuación puede no tener solución en los números reales**, como vimos antes para el caso $x^2+1=0$.

Para resolver una ecuación del tipo $ax^2+bx+c=0$ hay varios métodos.

1. **Por inspección.** Si $a=1$, un método muy rápido es hacerlo 'a ojo'. Como dijimos arriba, hallar las raices es lo mismo que factorizar. Así que lo que queremos es encontrar dos números r, s tales que

$$x^2+bx+c=(x-r)(x-s).$$

Si desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación anterior nos queda

$$x^2+bx+c=x^2-(r+s)x+rs,$$

así que los números r, s cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} r+s &= -b \\ rs &= c. \end{aligned}$$

Muchas veces estos números se pueden hallar a ojo. Por ejemplo:

Ejemplo: Factorizar el polinomio x^2+5x+6.

Debemos encontrar dos números r, s tales que su suma dé -5, y su producto dé 6. Basta probar un poco para ver que -3 y -2 cumplen los requisitos: $-3 + (-2) = -5$ y $(-3)(-2) = 6$. Por tanto el polinomio se factoriza como

$$x^2 + 5x + 6 = (x - (-3))(x - (-2)) = (x + 3)(x + 2),$$

y sus raices son -3 y -2.

2. **Completando el cuadrado.** La idea es lograr escribir todos los términos que tienen una x en el polinomio en la forma $(x - \text{algo})^2$, y luego simplificar. La mejor forma de explicarlo es con un ejemplo:

Ejemplo: Factorizar el polinomio $2x^2 + 3x - 5$.

Queremos resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Primero saquemos el 2 fuera:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right].$$

Ahora queremos escribir lo que está dentro del paréntesis en la forma $(x + d)^2 + h$.

Recuerden que $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Busquemos reproducir este término en el polinomio original:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 5 &= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)x - \frac{5}{2}\right] \quad \text{aquí vemos que } d = 3/4. \end{aligned}$$

Fijándonos en $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$, vemos que nos hace falta un término de la forma d^2, que no lo tenemos. Esto es fácil de resolver: se lo añadimos al polinomio. Pero claro, si queremos que el polinomio quede igual, también se lo tenemos que quitar:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 5 &= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot x - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] \end{aligned}$$

(Le añadimos y le quitamos el termino que queremos $((3/4)^2)$)

Ahora ya tenemos un cuadrado perfecto: $x^2 + 2\cdot(3/4)\cdot x + (3/4)^2 = (x + 3/4)^2$. Así que tenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x - 5 &= 2\left[x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot x - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)\cdot x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{5}{2}\right] \\ &= 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] \quad \text{(simplificando).} \end{aligned}$$

Ya hemos completado el cuadrado. Hemos llegado a:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2((x + 3/4)^2 - 49/16).$$

Para buscar las raíces de $2x^2 + 3x - 5$ sólo nos queda resolver la ecuación $2x^2 + 3x - 5 = 0$. Pero esto ahora es muy fácil: escribimos $2x^2 + 3x - 5$ como $2((x + 3/4)^2 - 49/16)$. Ahora resolvemos

$$2((x + 3/4)^2 - 49/16) = 0.$$

Dividimos todo por 2 y queda

$$(x + 3/4)^2 - 49/16 = 0 \quad \text{ya que } 0/2 = 0.$$

Pasamos el 49/16 al otro lado y queda

$$(x + 3/4)^2 = 49/16.$$

Hallamos la raíz cuadrada de ambos lados y queda (¡no se olviden del $\pm$!)

$$x + 3/4 = \pm\sqrt{49/16} = \pm 7/4.$$

Finalmente, pasamos el 3/4 al otro lado:

$$x = -3/4 \pm 7/4.$$

Obtenemos las soluciones $x = -5/2$ y $x = 1$.

El proceso parece largo, pero uno se acostumbra a hacerlo rápido. Completar el cuadrado tiene muchas otras aplicaciones, por ejemplo para dibujar parábolas, así que es importante conocerlo bien.

3. **Fórmula cuadrática.** Este es el método que nunca falla. Simplemente se aplica una fórmula. Si queremos hallar las raíces de un polinomio de grado 2, por ejemplo $ax^2 + bx + c$ (es decir, queremos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$), basta con aplicar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

¿De dónde sale esta fórmula? Simplemente de hacer el proceso de completar el cuadrado, como hicimos anteriormente, para un polinomio general $ax^2 + bx + c$.

Ejemplo: Factorizar el polinomio $x^3 - 7x + 11$.

Una vez más: factorizar es lo mismo que hallar sus raíces. Usando la fórmula cuadrática, tenemos

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así que las raíces son $(7 + \sqrt{5})/2$ y $(7 - \sqrt{5})/2$. Por tanto el polinomio se factoriza como

$$x^3 - 7x + 11 = (x - (7 + \sqrt{5})/2)(x - (7 - \sqrt{5})/2).$$

2.4.3. Ejercicios

1. Factorizar por inspección

   a) $x^2 - 7x + 10$

   b) $a^2 + 4a + 3$

   c) $x^2 + x - 2$

2. Completar el cuadrado y hallar sus raíces

   a) $x^2 - 4x + 3$
   b) $2x^2 + 4x - 6$
   c) $5x^2 + 13x - 6$

3. Factorizar, hallando sus raíces mediante la fórmula cuadrática
   a) $x^2 - 5x + 3$
   b) $2x^2 + 2x - 7$
   c) $5x^2 - 13x - 2$

4. Factorizar, usando cualquier método
   a) $3x^2 - 5x - 7$
   b) $x^2 + 2x + 1$
   c) $2x^2 - 10x + 4$
   d) $x^2 + 3x - 14$
   e) $6x^2 + 4x - 18$
   f) $x^2 - x - 8$
   g) $-4x^2 + 4x + 10$
   h) $x^2 - 5x + 2$

2.4.4. Raíces de polinomios de grado mayor que 2.

Hallar raíces de polinomios de grado mayor que 2 es, en general, una tarea más difícil. Existen fórmulas para hallar todas las raíces de polinomios de grados 3 y 4, pero son horriblemente complicadas. Para un polinomio en general la única manera de hallar sus raíces es utilizando métodos numéricos, es decir, con la ayuda de un computador.

Sin embargo, sí que hay métodos para hallar raíces en caso de que los polinomios sean suficientemente sencillos. La idea es, dado un polinomio, probar unas posibles raíces. Si sale, ya está. Si no sale, las raíces son demasiado complicadas para sacarlas a mano y sería necesario utilizar métodos numéricos. Ahora, practicamente todos los polinomios que se van a encontrar en los cursos de cálculo están preparados para que sean factorizables (es decir, se pueden encontrar todas sus raíces sin la ayuda de un computador).

Para hallar raíces de polinomios de grado mayor que 2, un método muy eficiente es el de división sintética. En realidad lo que se hace es evaluar el polinomio en, por ejemplo, $x = a$. Si sale cero, ya hemos encontrado una raíz (a), y por tanto sabemos que $(x-a)$ divide al polinomio original. Hacemos esta división obteniendo un polinomio de grado menor, y repetimos la operación.

La idea es utilizar un método muy eficiente de evaluación de polinomios, que exponemos a continuación.

Vamos a evaluar el polinomio $x^4-2x^3-7x^2+20x-12$ en $x = -1$ utilizando este método. Evidentemente podríamos sencillamente sustituir x por -1 y hacer los cálculos, pero el método que vamos a exponer es más rápido en la mayoría de los casos. Además nos da información extra que luego discutiremos.

Tomemos el polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$. Colocar los coeficientes de las distintas potencias de x en la forma siguiente:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

(en el polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$, 1 es el coeficiente de x^4, -2 es el coeficiente de x^3, -7 es el coeficiente de x^2, etc; los colocamos en ese orden. Si una potencia no aparece, ponemos 0. Por ejemplo, para el polinomio $2x^2 - 1$ los coeficientes serían $2, 0, -1$.)

En la esquina superior izquierda, colocar el número que queremos meter en el polinomio, en nuestro caso, -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Ahora, copiar el primer término de la fila de arriba (el que corresponde al coeficiente de x^4 en este caso), y ponerlo debajo de la línea horizontal. Esto lo hemos indicado con una flecha:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Siguiente, multiplicar este número que acabamos de bajar por el número en la esquina superior izquierda (es decir, el -1). Colocar el resultado debajo del siguiente número de la fila de arriba (esto es, el -2).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & -1 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

Ahora sumar la columna que hemos obtenido en el paso anterior (el -1 y el -2).

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & -1 & & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

Después, multiplicar lo obtenido (el -3) por el número que tenemos en la esquina superior izquierda (el -1 nuevamente), igual que hicimos en el paso anterior.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & -1 & 3 & & \\ \hline & 1 & -3 & & & \end{array}$$

Sumar la columna obtenida, como antes.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & -1 & 3 & & \\ \hline & 1 & -3 & -4 & & \end{array}$$

Repetir la operación hasta que lleguemos al final. Esto es lo que queda.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ -1 & \downarrow & -1 & 3 & 4 & -24 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 24 & \boxed{-36} \end{array}$$

Lo que queda al final, es decir, el -36, es el resultado de poner $x = -1$ en el polinomio original: $(-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot (-1) - 12 = 1 + 2 - 7 - 20 - 12 = -36$. Parece que sustituir directamente el -1 hubiera sido más eficiente, pero no es así en la mayoría de los casos.

Notar que si nos hubiera salido 0, habríamos encontrado una raíz. Probemos con otro número, por ejemplo, $x = 1$. Siguiendo el procedimiento anterior queda:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ & \downarrow & & & & \\ 1 & & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

Así que el resultado de meterle $x = 1$ al polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$ es lo que nos sale a la derecha, abajo, es decir, 0. ¡Acabamos de encontrar una raíz! Esto quiere decir que $(x - 1)$ es factor del polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12$. Dividamos este polinomio entre $(x - 1)$. Lo haremos usando división normal, y así veremos qué información extra nos da el método de división sintética.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} x^4 & - & 2x^3 & - & 7x^2 & + & 20x & - & 12 & x-1 \\ \cline{10-10} x^4 & - & x^3 & & & & & & & x^3 - x^2 - 8x + 12 \\ \cline{1-3} & - & x^3 & - & 7x^2 & & & & & \\ & - & x^3 & + & x^2 & & & & & \\ \cline{2-5} & & & - & 8x^2 & + & 20x & & & \\ & & & - & 8x^2 & + & 8x & & & \\ \cline{4-7} & & & & & & 12x & - & 12 & \\ & & & & & & 12x & - & 12 & \\ \cline{7-9} & & & & & & & & 0 & \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = (x - 1)(x^3 - x^2 - 8x + 12).$$

Pero ahora observen los números que salieron abajo al hacer división sintética: son 1, -1, -8, y 12, que son justamente. . . ¡los coeficientes del polinomio $x^3 - x^2 - 8x + 12$, que obtuvimos al hacer división normal! Así que lo de hacer división normal fue una pérdida de tiempo: el algoritmo de división sintética nos da, de una vez, lo que sale al dividir el polinomio original por $(x - 1)$.

Para factorizar el polinomio completamente podemos por tanto seguir haciendo división sintética. Ahora seguimos, con los coeficientes que tenemos abajo (ignorando el último que es 0), y ponemos otros números en vez del 1 que teníamos:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -7 & 20 & -12 \\ & \downarrow & & & & \\ 1 & & 1 & -1 & -8 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & \boxed{0} \\ & \downarrow & & & & \\ 2 & & 2 & 2 & -12 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & \\ & \downarrow & & & & \\ 2 & & 2 & 6 & -12 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Lo que queda al final (el 1 y el 3) son los coeficientes del polinomio que queda después de dividir el polinomio original por $(x-1)$, $(x-2)$, y $(x-2)$ otra vez. El polinomio con estos coeficientes es $(x+3)$. En otras palabras, tenemos

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 = (x - 1)(x - 2)(x - 2)(x + 3).$$

Ya hemos factorizado el polinomio, y encontrado sus raíces (¿Cuales son?). Ahora queda la pregunta de qué números se ponen en las esquinas. ¿Por qué en este ejemplo sale todo tan bien? ¿Por qué se escogieron los números 1, 2, y 2, y no otros? Sencillamente porque el autor ya sabía la respuesta. ¿Qué números hay que probar en general?

Regla para factorizar polinomios usando división sintética.

Dado un polinomio de la forma $Ax^n + \cdots + B$ (es decir, el coeficiente del término de mayor grado es A y el coeficiente del término sin x es B), donde A y B son enteros, los candidatos para raíces del polinomio son:

Todos los números de la forma $\frac{m}{n}$, con m y n enteros, donde

- m divide a B.
- n divide a A.

Ejemplo: ¿Qué candidatos para raíz tenemos para el polinomio $6x^3 + x - 10$?

Los divisores de 10 son $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$. Los divisores de 6 son $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Hay que poner todas las combinaciones posibles con $\pm1, \pm2, \pm5$ ó ±10 como numerador y $\pm1, \pm2, \pm3$ ó ±6 como denominador, es decir, en principio los candidatos son

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{10}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{6}, \pm\frac{5}{6}, \pm\frac{10}{6}.$$

Simplificando las fracciones vemos que hay algunos candidatos repetidos (por ejemplo, $\frac{2}{2} = 1$). Así que los candidatos son, realmente

$$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}.$$

Para factorizar el polinomio habría que probar todos estos números como raíces, que es largo, pero nos da la respuesta.

¿Qué pasa si ninguno de estos candidatos es una raíz? En ese caso hay un teorema que nos dice que las raíces de ese polinomio no son números racionales. Esencialmente la única posibilidad que nos quedaría para encontrar sus raíces es utilizar un computador que nos halle las raíces aproximadamente. En la mayoría de los casos que encontrarán en este curso, el método que hemos explicado funcionará para aquellos polinomios de grado mayor que dos que necesiten ser factorizados. Para grado dos se puede usar la fórmula cuadrática de una vez. Veamos un ejemplo completo de factorización.

Ejemplo: Factorizar el polinomio $6x^4 - 29x^3 - 9x^2 + 21x - 5$.

Los divisores de 5 son ±1 y ±5. Los divisores de 6 son ±1, ±2, ±3 y ±6.

Los candidatos a raíz son

$$\pm1, \pm5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}.$$

Comencemos a probar:

Probamos con el 1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -29 & -9 & 21 & -5 \\ 1 & \downarrow & 6 & 23 & 14 & 35 \\ \hline & 6 & 23 & 14 & 35 & \boxed{30} \end{array}$$

No funciona: el 30 que nos sale al final, encuadrado, nos dice que al evaluar el polinomio en $x = 1$ el resultado es 30. Para que 1 sea raíz debería dar 0. Probemos ahora con el -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & -29 & -9 & 21 & -5 \\ -1 & \downarrow & -6 & 35 & -26 & 5 \\ \hline & 6 & -35 & 26 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

¡Acabamos de encontrar una raíz! Al meterle -1 al polinomio nos sale 0, así que -1 es una raíz, y de momento podemos factorizar el polinomio como

$$6x^4 - 29x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = (x - (-1))(6x^3 - 35x^2 + 26x - 5).$$

(Recuerden que, una vez hallada una raíz, el factor es (x − la raíz). También recuerden que el otro polinomio que nos sale como factor es aquel que tiene como coeficientes $6, -35, 26, -5$, que son los números que obtuvimos en la fila de abajo al hacer división sintética.)

Sigamos reduciendo más el polinomio. El 1 está eliminado porque lo probamos y no funcionó. El -1 sí nos funcionó. ¿Podría funcionar otra vez? Por supuesto que sí. Así que probemos con -1 otra vez. Esta vez lo vamos a hacer de otra manera. Como lo único que necesitamos para ver si -1 es una raíz es evaluar el polinomio en $x = -1$, sencillamente sustituyamos -1 en el polinomio que queremos descomponer (que ahora es $6x^3 - 35x^2 + 26x - 5$):

$$6 \cdot (-1)^3 - 35 \cdot (-1)^2 + 26 \cdot (-1) - 5 = -6 - 35 - 26 - 5 = -\text{mucho} \neq 0.$$

Por tanto, -1 ya queda eliminado. Nos sirvió una vez, démosle las gracias y continuemos.

Ahora probemos con el 5. Hagámoslo otra vez evaluando:

$$6 \cdot 5^3 - 35 \cdot 5^2 + 26 \cdot 5 - 5 = 750 - 875 + 130 - 5 = 0.$$

Tuvimos suerte. Resulta que de una nos sale que 5 es una raíz del polinomio. Para ver que nos queda al dividir el polinomio $6x^3 - 35x^2 + 26x - 5$ por $(x - 5)$, ahora nos toca de todas formas hacer división sintética (podríamos hacer división normal, pero es más largo).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -35 & 26 & -5 \\ 5 & \downarrow & 30 & -25 & 5 \\ \hline & 6 & -5 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Por tanto el polinomio original ahora lo tenemos factorizado como

$$6x^4 - 29x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = (x - (-1))(x - 5)(6x^2 - 5x + 1).$$

Sólo nos queda factorizar $6x^2 - 5x + 1$ y ya habremos acabado. Notar que es un polinomio de grado 2, y por tanto podemos usar otros métodos, como la fórmula cuadrática. Pero sigamos usando división sintética. Probemos ahora, en el polinomio $6x^2 - 5x + 1$, con $1/2$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 6 & -5 & 1 \\ 1/2 & \downarrow & 3 & -1 \\ \hline & 6 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Volvió a funcionar. Ya lo tenemos todo. El polinomio original, factorizado completamente, sale

$$6x^4 - 29x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = (x + 1)(x - 5)(x - 1/2)(6x - 2).$$

Queda mejor dividiendo el último término $(6x - 2)$ por 6 para que todo quede en la forma (x − algo):

$$6x^4 - 29x^3 - 9x^2 + 21x - 5 = 6\,(x + 1)(x - 5)(x - 1/2)(x - 1/3).$$

Sus raíces son, por tanto, $-1, 5, 1/2, 1/3$. Ya hemos terminado.

2.4.5. Ejercicios

1. Factorizar los siguientes polinomios.

a) $x^3 + x^2 - x - 1$

b) $x^3 + 2x^2 + x + 2$

c) $x^3 - 6x^2 + 32$

d) $a^4 - 15a^2 - 10a + 24$

e) $x^5 - 21x^3 + 16x^2 + 108x - 144$

f) $2a^5 - 8a^4 + 3a - 12$

g) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$

Capítulo 3

Suma de Fracciones

3.1. Mínimo común múltiplo

Dados dos polinomios, su **Mínimo común múltiplo** (denotado a partir de ahora como **M.C.M.** es el polinomio de grado más bajo que es múltiplo de ambos. Por ejemplo, el M.C.M. de x^2+1 y x es $x(x^2+1)$. Notar que $x^2(x^2+1)$ también es un múltiplo de ambos, pero tiene grado más alto (4).

3.1.1. Cómo hallar el M.C.M.

Dados dos polinomios, su M.C.M. se halla de la siguiente manera:

1. Factorizar completamente ambos polinomios.

2. Tomar los factores necesarios (sólo los necesarios) de cada polinomio para que el producto de estos factores sea un múltiplo de ambos. Más concretamente, hay que tomar tanto los factores comunes como los no comunes a los dos polinomios, elevados al mayor exponente encontrado.

3.1.2. Ejemplos

Ejemplo Hallar el M.C.M. de $x(x-3)^3(x+1)$ y $(x-3)(x+1)^4(x+7)^2$.

Los polinomios ya están factorizados. Por tanto sólo hace falta tomar los factores indicados en el punto 2 arriba. Los factores comunes son $(x-3)$ y $(x+1)$. Los no comunes son x y $(x+7)$. El M.C.M. es el producto de estos factores elevados al mayor exponente con el que aparezcan. Por tanto, el M.C.M. es

$$x(x+7)^2(x-3)^3(x+1)^4.$$

Ejemplo Hallar el M.C.M. x^3-25x y $x^2+2x-15$.

Primero hay que factorizar:

$$x^3-25x = x(x^2-25) = x(x-5)(x+5).$$

$$x^2+2x-15 = (x+5)(x-3).$$

Factores comunes: $(x+5)$. Factores no comunes: x, $(x-5)$, $(x-3)$.

M.C.M.: $x(x-5)(x-3)(x+5)$

3.1.3. Ejercicios

1. Hallar el M.C.M. de las siguientes parejas de polinomios.

   a) x^2 y $x^3 + x^2 - 2x$.

   b) $x^3 - 1$ y $(x-1)^3$.

   c) $x^2 + 3x - 10$ y $4x^2 - 7x - 2$.

   d) $x^3 - 2x^2$ y $x^2 - 4$.

   e) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ y $x^4 + 2x^3 - 15x^2$.

3.2. Suma de fracciones

Dadas dos fracciones con polinomios en el numerador y en el denominador, para sumarlas o restarlas es necesario poner ambas fracciones bajo un denominador común. Por ejemplo, para sumar

$$\frac{x}{x+2} + \frac{3x^2+1}{x-3},$$

es necesario ponerlas bajo un denominador común. Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por la misma cantidad, dicha fracción no varía. Por tanto la manera a proceder es multiplicar el denominador de cada fracción por una cantidad de tal manera que al final ambas fracciones queden con el mismo denominador. En este caso, multiplicamos numerador y denominador de la primera por $(x-3)$, y multiplicamos numerador y denominador de la segunda por $(x+2)$:

$$\frac{x(x-3)}{(x+2)(x-3)} + \frac{(3x^2+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}.$$

Ahora ambas tienen $(x+2)(x-3)$ como denominador. Para hacer la suma, como tienen el mismo denominador (es decir, están expresadas en las mismas 'unidades'), basta con sumar los numeradores y ponerlos sobre el denominador común:

$$\frac{x(x-3) + (3x^2+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}.$$

Desarrollando el numerador y simplificando queda (NOTA: ¡no desarrollar el denominador! En general es mejor dejarlo factorizado):

$$\frac{(x^2-3x) + (3x^3+x+6x^2+2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3x^3+7x^2-2x+2}{(x+2)(x-3)}.$$

En general lo más fácil es encontrar el M.C.M. de los denominadores (llamado mínimo común denominador. Es decir, el procedimiento es:

1. Hallar el M.C.M. de los denominadores. Cualquier otro múltiplo común de los denominadores vale también. Lo de usar el mínimo es sólo para que el resultado final quede lo más sencillo posible.

2. Multiplicar numerador y denominador de cada fracción por el polinomio pertinente para que ambas fracciones queden con el mismo denominador.

3. Sumar (o restar) los numeradores. Cuidado al hacer restas; es un error muy común olvidarse de que el menos afecta a toda la fracción.

Ejemplo:

Hallar $\dfrac{x+3}{x^2+5x+6} - \dfrac{x^2}{x^2-3x-10}$.

Primero hallamos el M.C.M. de los denominadores. El primer denominador se factoriza como $(x+2)(x+3)$ (es fácil hacerlo a ojo). El segundo se factoriza como $(x+2)(x-5)$. Por tanto el M.C.M. es $(x+2)(x+3)(x-5)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{x^2+5x+6} - \frac{x^2}{x^2-3x-10} &= \frac{x+3}{(x+2)(x+3)} - \frac{x^2}{(x+2)(x-5)} \\
&= \frac{(x+3)(x-5)}{(x+2)(x+3)(x-5)} - \frac{x^2(x+3)}{(x+2)(x-5)(x+3)} \\
&= \frac{[(x+3)(x-5)] - [x^2(x+3)]}{(x+2)(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{[x^2-2x-15] - [x^3+3x^2)]}{(x+2)(x+3)(x-5)} \\
&= \frac{-x^3-2x^2-2x-15}{(x+2)(x+3)(x-5)}
\end{aligned}$$

3.2.1. Ejercicios

1. Simplificar

   a) $\dfrac{1}{x-4} - \dfrac{2}{x-3}$.

   b) $\dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$.

   c) $\dfrac{2a-3}{6a-9} + \dfrac{a-1}{4a^2+12a+9}$.

   d) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{x-1}{x^2-x+1}$.

   e) $\dfrac{1}{x^2+2x} - \dfrac{1}{x^2-2x}$.

   f) $\dfrac{1}{a+5} - \dfrac{12}{(a+5)^2}$.

2. Simplificar

   a) $\dfrac{1+\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}}$.

   b) $\dfrac{\dfrac{x+3}{x+4} - \dfrac{x+1}{x+2}}{\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x-3}{x+4}}$.

   c) $\dfrac{1+\dfrac{2x}{1+x^2}}{2x+\dfrac{2x^5+2}{1-x^4}}$.

   d) $\dfrac{1-\dfrac{7}{x}+\dfrac{12}{x^2}}{x-\dfrac{16}{x}}$.